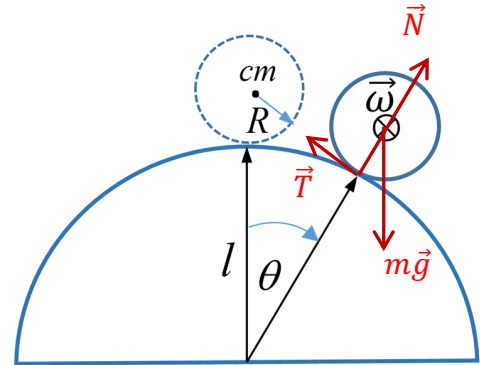
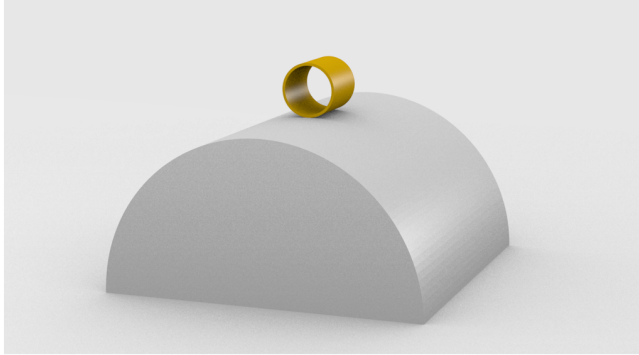


### Exercice 1: Cylindre creux qui roule puis décolle (1,4 point)

Un cylindre creux de masse  $m$ , de longueur  $L$ , de rayon  $R$ , et d'épaisseur négligeable repose sur un support dont la forme est un demi-cylindre de rayon  $l$ , comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Les deux axes de symétrie des cylindres sont parallèles. Le cylindre creux est initialement immobile au sommet du support ( $\theta = 0$ ), puis il se met à rouler sans glisser le long du support. La position du cylindre creux est repérée par l'angle  $\theta$ , tel qu'indiqué sur la figure ci-dessous. On néglige les frottements de l'air. On note  $g$  l'accélération de la pesanteur.



- a) Démontrez que le moment d'inertie  $I_{cm}$  du cylindre creux pour une rotation autour de son axe de symétrie est  $I_{cm} = mR^2$ .

$$I_{cm} = \iiint_{\text{Volume}} \underbrace{r^{\perp 2}}_{R^2 = \text{cte}} dm = R^2 \iiint_{\text{Volume}} dm = mR^2 \quad \text{0,1 pt}$$

- b) Indiquez les forces qui s'exercent sur le cylindre creux. On prendra soin de préciser leur point d'application. Dessinez ces forces sur le schéma de droite, pour la position  $\theta > 0$ .

Au centre de masse : poids  $m\vec{g}$  ; Au point de contact A : Réaction normale  $\vec{N}$  et tangentielle (frottement)  $\vec{T}$  0,15 pt

Le cylindre creux roule sans glisser jusqu'à un angle critique  $\theta_c$ , puis il « décolle ». Il n'est alors plus en contact avec le support.

- c) Quel est le type de trajectoire du cylindre creux après avoir quitté le support ?

Parabolique ou uniformément accéléré ( $\vec{g}$ ) 0,1 pt

- d) Calculez l'angle critique de décollage  $\theta_c$ .

$$\theta_c = \frac{\pi}{3} \quad \left( \text{ou } \text{Acos}\left(\frac{1}{2}\right) \right) \quad \text{0,5 pt}$$

- e) Déterminez l'équation différentielle du mouvement du cylindre creux selon  $\theta$ , pour  $\theta < \theta_c$  (pendant qu'il roule sans glisser sur le support). Exprimez cette équation en fonction de  $R$ ,  $l$ , et  $g$ .

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)} \sin \theta \quad \text{0,4 pt}$$

- f) Si le cylindre creux glissait sans frottement (pas de rotation), l'angle critique de décollage  $\theta_c$  serait-il plus grand ou plus petit ? Argumentez sans calcul.

$\theta_c$  serait plus petit car le cylindre irait plus vite (il y aurait moins d'inertie due à la rotation) 0,1 pt

**Exercice 1: Cylindre creux qui roule puis décolle** (Justifications et compléments de calculs)

d) Calculez l'angle critique de décollage  $\theta_c$ .

- Condition pour le « décollage » :  $N = 0$  **0,1 pt**
- Newton selon  $\vec{e}_r$  **0,1 pt** :  $\underbrace{-m(l+R)\dot{\theta}_c^2}_{\substack{\text{accélération centrifuge} \\ (\text{mvt circulaire})}} = -mg \cos \theta_c + N$

$$\rightarrow \dot{\theta}_c^2 = \frac{g \cos \theta_c}{l+R}$$

- Conservation de l'énergie mécanique pour exprimer  $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$  :  
Équation de liaison entre  $\omega$  et  $\dot{\theta}$ .

En notant  $A$  le point de contact du cylindre creux :

$$v_A = v_{cm} + v_{A/cm} = 0 \Rightarrow (l+R)\dot{\theta} - R\omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{l+R}{R}\dot{\theta} \quad \text{0,1 pt (équation de de liaison)}$$

Énergie potentielle :

$$E_p = mgh_{cm} = mg(l+R)(\cos \theta - 1) \quad (\text{ici choisie telle que } E_p(\theta = 0) = 0)$$

Énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}m((l+R)\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{l+R}{R}\dot{\theta}\right)^2 = m(l+R)^2\dot{\theta}^2$$

Énergie mécanique :

$$E_m = E_p + E_c = mg(l+R)(\cos \theta - 1) + m(l+R)^2\dot{\theta}^2$$

Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = cte = E_m(\theta = 0) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g(1 - \cos \theta)}{l+R} \quad \text{0,15 pt}$$

Finalement :

$$\dot{\theta}_c^2 = \frac{g \cos \theta_c}{l+R} \text{ avec } \dot{\theta}^2 = \frac{g(1 - \cos \theta)}{l+R} \Rightarrow \frac{g(1 - \cos \theta_c)}{l+R} = \frac{g \cos \theta_c}{l+R} \Rightarrow \cos \theta_c = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_c = A \cos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad \text{0,05 pt}$$

e) Déterminez l'équation différentielle du mouvement du cylindre creux selon  $\theta$ , pour  $\theta < \theta_c$  (pendant qu'il roule sans glisser sur le support). Exprimez cette équation en fonction de  $R$ ,  $l$ , et  $g$ .

Newton selon  $\vec{e}_\theta$  :  $m(l+R)\ddot{\theta} = mg \sin \theta + T$  **0,05 pt**

Théorème du moment cinétique au centre de masse :

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{M}_{cm,T} \quad \text{0,05 pt} \Rightarrow I_{cm}\dot{\omega}\vec{e}_z = -RT\vec{e}_z \Rightarrow T = -mR\dot{\omega}$$

$$\Rightarrow m(l+R)\ddot{\theta} = mg \sin \theta - mR\dot{\omega} \quad \text{0,1 pt}$$

Avec l'équation de liaison

$$\dot{\omega} = \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} \quad \text{0,1 pt} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)} \sin \theta \quad \text{0,1 pt}$$

**Autre Méthode :** On peut appliquer le théorème du moment cinétique en  $A$  (car  $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_{cm}$ )

$$\text{Théorème du moment cinétique en } A : \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,mg} \quad \text{0,05 pt} \Rightarrow I_A\dot{\omega}\vec{e}_z = Rmg \sin \theta \vec{e}_z \quad \text{0,1 pt}$$

$$\text{avec steiner: } I_A = mR^2 + I_{cm} \quad \text{0,05 pt} = 2mR^2 \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{g}{2R} \sin \theta$$

Et avec l'équation de liaison

$$\dot{\omega} = \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} \quad \text{0,1 pt} \rightarrow \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} = \frac{g}{2R} \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)} \sin \theta \quad \text{0,1 pt}$$

## Exercice 2: La balance de Cavendish (1,4 point)

La balance de Cavendish est un instrument permettant de déterminer expérimentalement la constante de gravitation  $G$ . Elle est constituée de deux points matériels  $P_1$  et  $P_2$  de même masse  $m$  reliés par une tige sans masse à un fil, formant un pendule de torsion. Deux grosses sphères de masse  $M$ ,  $S_A$  et  $S_B$ , peuvent être placées de manière à faire dévier le pendule dans un sens ou dans l'autre par l'effet de la gravitation.

### Partie 1 : Étude du pendule de torsion.

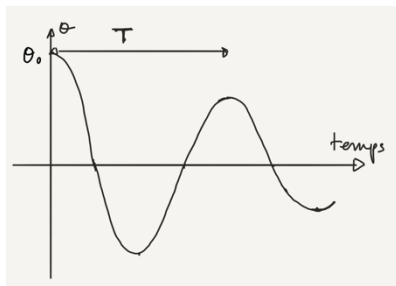
Les masses  $P_1$  et  $P_2$  sont reliées par une tige sans masse de longueur  $2d$ , et contraintes de tourner autour de  $O$  dans le plan horizontal  $(O, x, y)$ .

- a) Calculez le moment d'inertie  $I_O$  du pendule de torsion par rapport à l'axe  $(Oz)$

$$I_O = m\overline{OP_1}^2 + m\overline{OP_2}^2 = 2md^2 \quad 0,1 \text{ pt}$$

Le fil est caractérisé par deux constantes,  $\kappa$  et  $b$ , définies comme suit :

- le fil exerce un moment élastique dépendant de l'angle de déviation  $\theta$ , donné par  $\vec{M}_0^{el} = -\kappa\theta\vec{e}_z$ ,
- et les frottements internes du fil exercent le moment  $\vec{M}_0^f = -b\dot{\theta}\vec{e}_z$ .



On écarte le pendule de sa position d'équilibre de l'angle  $\theta_0$  et on le lâche sans lui communiquer de vitesse angulaire. On mesure l'angle de déviation en fonction du temps et on observe des oscillations décroissantes avec une pseudo période  $T$  (voir ci-contre).

- b) Établissez l'équation différentielle du mouvement sur la variable  $\theta$ .

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{2md^2}\dot{\theta} + \frac{\kappa}{2md^2}\theta = 0 \quad 0,2 \text{ pt}$$

- c) Quelle est la pulsation propre du pendule de torsion ?

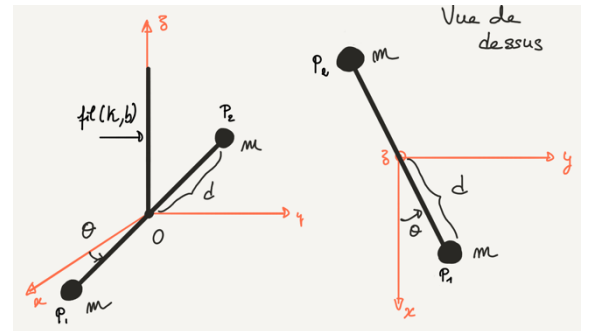
$$\text{Pulsation propre : } \omega_0 = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} \quad 0,1 \text{ pt}$$

- d) Donnez la forme générale de la solution de l'équation différentielle sans calculer les constantes d'intégration. Explicitiez la pseudo-période et le facteur d'amortissement en fonction des données du problème.

$$\theta(t) = \theta(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \lambda = \frac{b}{4md^2} \text{ et } \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{2md^2} - \frac{b^2}{(4md^2)^2}} \quad 0,2 \text{ pt}$$

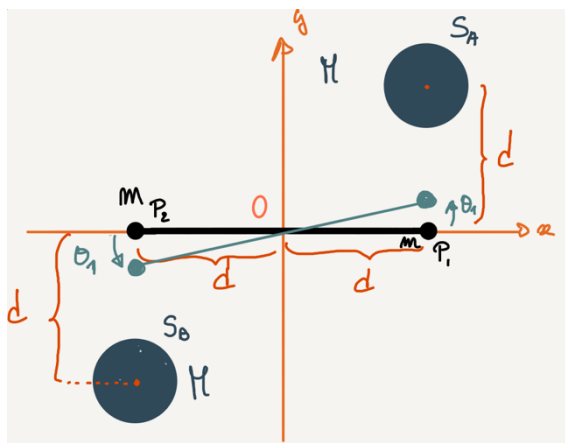
- e) On suppose l'amortissement très faible ( $b \approx 0$ ) et on mesure  $T$ . Déterminez  $\kappa$  en fonction de  $T$ ,  $m$  et  $d$ .

$$\kappa = 2m\left(\frac{\pi d}{T}\right)^2 \quad 0,1 \text{ pt}$$



## Partie 2 : Influence de la force de gravitation des 2 grosses sphères sur les deux masses ponctuelles

On amène les deux grosses sphères ( $S_A$ ,  $S_B$ ) de masse  $M$ , en regard des masses ponctuelles ( $P_1$ ,  $P_2$ ) à une distance  $d$  de l'axe  $Ox$ , et on laisse le pendule s'équilibrer avec l'angle de déviation  $\theta_1$ . On suppose l'angle  $\theta_1$  très faible ( $\theta_1 \ll 1$ ).



- a) Exprimez (vectoriellement) le moment, par rapport à  $O$  sur le pendule, lié à la force de gravitation de  $S_A$  sur  $P_1$  et de  $S_B$  sur  $P_2$ .

$$\vec{\mathcal{M}}_{0,1}^{tot} = 2 \frac{GmM}{d} \vec{e}_z \quad 0,2 \text{ pt}$$

- b) Exprimez (vectoriellement) le moment lié à la force de gravitation de  $S_A$  sur  $P_2$  et de  $S_B$  sur  $P_1$ .

$$\vec{\mathcal{M}}_{0,2}^{tot} = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \frac{GmM}{d} \vec{e}_z \quad 0,2 \text{ pt}$$

- c) Montrez que pour un calcul d'ordre de grandeur, on peut négliger  $\|\vec{\mathcal{M}}_{0,2}^{tot}\|$  devant  $\|\vec{\mathcal{M}}_{0,1}^{tot}\|$

$$\frac{\|\vec{\mathcal{M}}_{0,2}^{tot}\|}{\|\vec{\mathcal{M}}_{0,1}^{tot}\|} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \approx \frac{1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{10}. \text{ Environ 10 fois plus petit, c'est bien négligeable pour calculer un ordre de grandeur } 0,05 \text{ pt} \dots$$

- d) Exprimez l'angle  $\theta_1$  à l'équilibre en fonction de  $G$ ,  $M$ ,  $m$ ,  $d$  et  $\kappa$ .

$$\theta_1 = 2 \frac{GmM}{d} \kappa \quad 0,15 \text{ pt}$$

- e) Déduisez l'expression de  $G$  en fonction de  $M$ ,  $m$ ,  $d$ ,  $T$  et  $\theta_1$ , grandeurs qui sont connues ou facilement mesurables.

$$G = \frac{\theta_1 T^2}{4\pi^2 m M d} \quad 0,1 \text{ pt}$$

## Exercice 2: La balance de Cavendish (Justifications et compléments de calculs)

### Partie 1 : Étude du pendule de torsion.

b) Établissez l'équation différentielle du mouvement sur la variable  $\theta$ .

$O$  est un point fixe (et le centre de masse), on applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{el} + \vec{M}_O^f \Rightarrow I_O \ddot{\theta} \vec{e}_z = -\kappa \theta \vec{e}_z - b \dot{\theta} \vec{e}_z \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{b}{2md^2} \dot{\theta} + \frac{\kappa}{2md^2} \theta = 0$$

c) Pulsation propre :

On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti,  $\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ , où  $\omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur (i.e. la pulsation de l'oscillateur lorsque l'amortissement  $\lambda$  est nul.) Par identification :

$$\omega_0^2 = \frac{\kappa}{2md^2}$$

d) D'après le graphe représentant les oscillations du pendule, il est dans un régime d'amortissement faible.

Dans ce cas, la forme générale de la solution de  $\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$  est :

$$\theta(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \lambda \text{ le coefficient d'amortissement et } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \text{ la pseudo période}$$

Expression de  $\lambda$  et  $\omega$  en fonction des données du problème :

$$\lambda \text{ est obtenu par identification : } 2\lambda = \frac{b}{2md^2} \Rightarrow \lambda = \frac{b}{4md^2}.$$

Puis  $\omega$  :

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{2md^2} - \left(\frac{b}{4md^2}\right)^2}$$

e)  $\kappa$  en fonction de  $T$ ,  $m$  et  $d$  :

$$\text{Pour } b \approx 0, \omega \approx \omega_0 = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\kappa}{2m}}$$

On écrit la relation entre la période et la pulsation :

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_0 = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\kappa}{2m}} \Rightarrow \frac{\kappa}{2m} = \frac{4\pi^2 d^2}{T^2} \Rightarrow \kappa = 2m \left(\frac{\pi d}{T}\right)^2$$

### Partie 2 : Influence de la force de gravitation des 2 grosses sphères sur les deux masses ponctuelles

a) et b) : Comme  $\theta_1 \ll 1$ , on fait le calcul des moments avec  $\theta_1 = 0$

$$\vec{M}_{0,1}^{tot} = \left(d\vec{e}_x \times \frac{GmM}{d^2} \vec{e}_y\right) + \left(-d\vec{e}_x \times -\frac{GmM}{d^2}\right) = 2 \frac{GmM}{d} \vec{e}_z$$

Avec l'aide de Pythagore on voit que  $\vec{P}_2 \vec{S}_A = -\vec{P}_1 \vec{S}_B = \sqrt{5}d \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y\right)$ , d'où :

$$\vec{M}_{0,2}^{tot} = \left(-d\vec{e}_x \times \frac{GmM}{5d^2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y\right)\right) + \left(d\vec{e}_x \times -\frac{GmM}{5d^2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y\right)\right) = -\frac{2}{5\sqrt{5}} \frac{GmM}{d} \vec{e}_z$$

d) Comme c) l'indique, on ne tient pas compte de  $\vec{M}_{0,2}^{tot}$ . A l'équilibre, le moment total est nul en  $O$  :

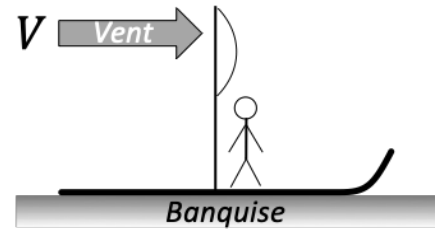
$$\vec{M}_0^{el} + \underbrace{\vec{M}_0^f}_{=0} + \vec{M}_{0,1}^{tot} = 0 \Rightarrow 2 \frac{GmM}{d} = \kappa \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = 2 \frac{GmM}{d\kappa}$$

e) On injecte 1e) dans 2d)

$$G = \frac{\theta_1 d \kappa}{2mM} = \frac{\theta_1 d}{2mM} \frac{2m\pi^2 d^2}{T^2} = \frac{\pi^2 \theta_1 d^3}{MT^2}$$

### Exercice 3 : Voyage de Mike Horn sur un traineau à voile (1,1 point)

On étudie le trajet de l'aventurier Mike Horn qui voyage sur un traineau à voile sur la banquise. Mike se déplace dans la même direction que le vent de vitesse  $V$ . Les patins du traineau subissent une force de frottement sec avec la banquise, avec des coefficients statique et dynamique  $\mu_s$  et  $\mu_d$  respectivement. La poussée du vent dans la voile correspond à une force de frottement fluide en régime laminaire, avec un coefficient de viscosité  $\eta$  et un facteur de forme  $K$ .  $\eta$ ,  $K$  et  $V$  sont constants durant le trajet. On note  $m$  la masse totale du traineau et de Mike, et  $g$  l'accélération de la pesanteur. La banquise est parfaitement horizontale. Les frottements du vent ne s'exercent que sur la voile.



- a) Le traineau est initialement au repos. Au temps  $t = 0$ , Mike ouvre la voile. Le traineau ne se met en mouvement que si la vitesse du vent est supérieure à une valeur  $V_{min}$ . Exprimez  $V_{min}$  en fonction des données du problème.

$$V_{min} = \frac{\mu_s m g}{K \eta} \quad 0,1 \text{ pt}$$

- b) La vitesse du vent étant suffisante ( $V > V_{min}$ ), le traineau se met en mouvement. Au bout d'un certain temps, la vitesse du traineau se stabilise à la valeur  $v_{0l}$ . Exprimez  $v_{0l}$  en fonction des données du problème.

$$v_{0l} = V - \frac{\mu_d m g}{K \eta} \quad 0,2 \text{ pt}$$

- c) On note  $v(t)$  la vitesse du traineau. Trouvez une équation différentielle sur  $v$  décrivant le mouvement du traineau, en fonction de  $v_{0l}$ ,  $m$ ,  $K$  et  $\eta$ .

$$\dot{v} = \frac{K \eta}{m} (v_{0l} - v) \quad 0,2 \text{ pt}$$

- d) Exprimez la vitesse du traineau en fonction du temps et des paramètres  $v_{0l}$ ,  $m$ ,  $K$  et  $\eta$ .

$$v(t) = v_{0l} \left( 1 - e^{-\frac{K \eta}{m} t} \right) \quad 0,15 \text{ pt}$$

- e) Durant le trajet (alors que sa vitesse s'est stabilisée à  $v_{0l}$ ), Mike attrape et charge à bord, sans s'arrêter, un bloc de glace de masse  $M$  posé sur la banquise. La vitesse du traineau chute brutalement à la valeur  $v_1$ , puis elle augmente et se stabilise à nouveau à la valeur  $v_{1l}$ . Exprimez  $v_1$  et  $v_{1l}$  en fonction de  $v_{0l}$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $\mu_d$ ,  $K$  et  $\eta$ .

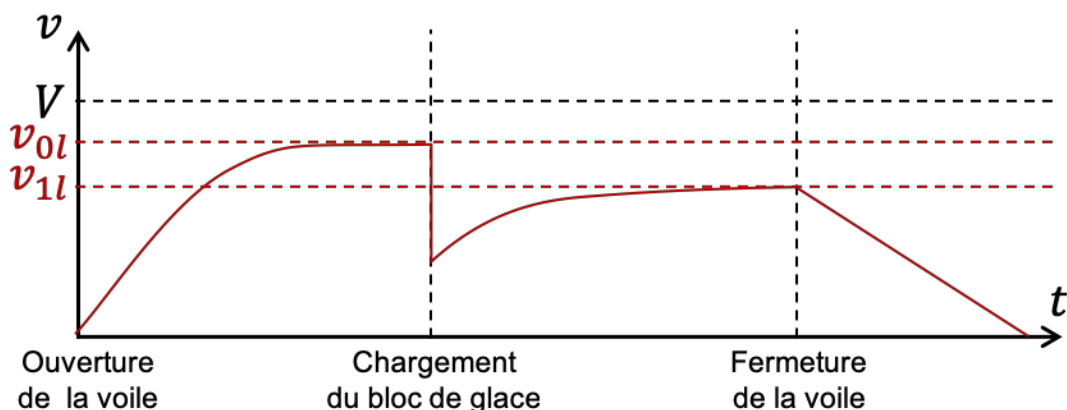
$$v_1 = v_1 = \frac{m}{m+M} v_{0l} \quad 0,15 \text{ pt}$$

$$v_{1l} = v_{0l} - \frac{\mu_d M g}{K \eta} \quad 0,05 \text{ pt}$$

- f) Enfin, Mike ferme la voile pour s'arrêter. Exprimez la distance d'arrêt  $L$  après la fermeture de la voile, en fonction de  $v_{1l}$  et des données du problème.

$$L = \frac{v_{1l}^2}{2 \mu_s g} \quad 0,1 \text{ pt}$$

- g) Complétez le graphe suivant pour décrire l'évolution de la vitesse du traineau durant le trajet (la vitesse du vent  $V$  est notée, rajoutez-y au besoin les vitesses discutées dans les questions précédentes). 0,15 pt



**Exercice 3 : Voyage de Mike Horn sur un traineau à voile** (Justifications et compléments de calculs)

a) La force de réaction normale  $\vec{N}$  est  $\vec{N} = -m\vec{g}$

La limite de mise en mouvement du traineau est donnée par:

$$F_V + F_f = 0 \Rightarrow \mu_s mg = K\eta V_{min} \Rightarrow V_{min} = \frac{\mu_s mg}{K\eta}$$

b) Lorsque la vitesse est stabilisée, la somme des forces est nulle

$$F_V + F_f = 0 \Rightarrow -\mu_d mg - K\eta \underbrace{(v_{0l} - V)}_{\substack{\text{vitesse} \\ \text{voile/vent}}} = 0 \Rightarrow v_{0l} = V - \frac{\mu_d mg}{K\eta}$$

c) Newton en utilisant la vitesse  $v$  comme variable :

$$m\dot{v} = F_V + F_f = -\mu_d mg - K\eta(v - V) = -\mu_d mg - K\eta\left(v - v_{0l} - \frac{\mu_d mg}{K\eta}\right) = K\eta(v_{0l} - v) \Rightarrow \dot{v} = \frac{K\eta}{m}(v_{0l} - v)$$

d) Intégration : Solution générale = Solution homogène + Solution particulière

Solution homogène

$$\dot{v} = -\frac{K\eta}{m}v \Rightarrow v = A e^{-\frac{K\eta}{m}t}$$

Solution particulière :  $v = v_{0l}$

Solution générale :

$$v = A e^{-\frac{K\eta}{m}t} + v_{0l}$$

$$v = 0 \text{ à } t = 0 \Rightarrow A = -v_{0l}, \text{ soit } v = v_{0l} \left(1 - e^{-\frac{K\eta}{m}t}\right)$$

e) Le chargement du bloc se traite comme un choc mou, avec la conservation de la quantité de mouvement.

$$mv_{0l} + 0 = (m + M)v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{m}{m + M}v_{0l}$$

Quand à  $v_{1l}$ , même chose qu'en b) mais avec la masse  $(m + M)$  :

$$v_{1l} = V - \frac{\mu_d(m + M)g}{K\eta} = v_{0l} - \frac{\mu_d M g}{K\eta}$$

f) Voile fermé, la seule force restante est  $F_f$ . Le calcul le plus rapide pour la distance d'arrêt se fait avec l'approche énergétique :

$$\Delta E_m = W_f \Rightarrow \left(0 - \frac{1}{2}mv_{1l}^2\right) = -\mu_s mgL \Rightarrow L = \frac{v_{1l}^2}{2\mu_s g}$$

#### Exercice 4 : Vol vers la Station Spatiale Internationale (1,1 point)

La station spatiale internationale est un satellite tournant autour de la Terre. Les spatonautes sont ravitaillés périodiquement par une navette lancée par une fusée. On appellera  $G$  la constante de gravitation universelle et  $M$  la masse de la Terre.

Après la libération par la fusée, la navette de masse  $m$  est placée sur une orbite circulaire  $C_1$  de rayon  $R_1$ , qui est plus petite que l'orbite circulaire  $C_2$  de rayon  $R_2$  de la station spatiale.

- a) Démontrez que la vitesse d'un satellite sur une orbite circulaire est constante.

La conservation du moment cinétique  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}$  (force centrale) impose  $v = cte$  si  $r = cte$  **0,1 pt**

- b) Exprimez la vitesse  $v_1$  de la navette sur l'orbite circulaire  $C_1$  en fonction des données du problème.

$$v_1 = \sqrt{\frac{MG}{R_1}} \quad \text{0,1 pt}$$

- c) Donnez l'expression de l'énergie mécanique  $E_1$  sur l'orbite  $C_1$  en fonction de  $G$ ,  $m$ ,  $M$ , et  $R_1$ .

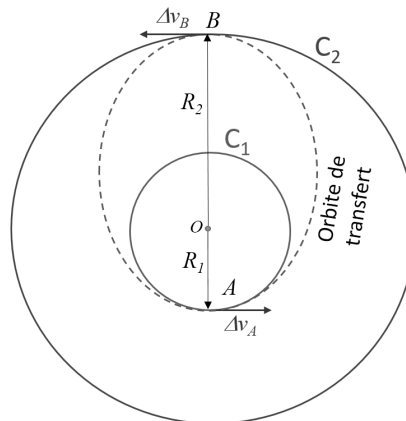
$$E_1 = -\frac{1}{2} \frac{mMG}{R_1} \quad \text{0,1 pt}$$

La navette rejoint ensuite l'orbite  $C_2$  grâce à l'allumage d'un moteur.

- d) Calculer le travail  $W_{12}$  de la force de gravitation  $\vec{F}$  qui s'exerce sur la navette quand celle-ci passe de l'orbite  $C_1$  à l'orbite  $C_2$ .

$$W_{12} = -\Delta E_p = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) mMG \quad \text{0,2 pt}$$

En pratique, pour atteindre l'orbite circulaire  $C_2$ , il faut d'abord passer par une orbite de transfert qui est elliptique, comme indiqué en pointillé sur le schéma ci-dessous.



- e) La navette est sur l'orbite de transfert. Exprimez la vitesse  $v_B$  de la navette au point  $B$  en fonction de sa vitesse  $v_A$  au point  $A$ .

$$v_B = \frac{R_1}{R_2} v_A \quad \text{0,15 pt}$$

- f) Déterminez l'expression de l'énergie mécanique  $E_T$  sur l'orbite de transfert en fonction de  $G$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

$$E_T = -\frac{mMG}{(R_2 + R_1)} \quad \text{0,3 pt}$$

- g) Exprimez la vitesse  $v_A = v_1 + \Delta v_A$  qu'il faut communiquer à la navette pour passer de l'orbite circulaire  $C_1$  à l'orbite de transfert. Le résultat sera exprimé en fonction de  $E_T$ ,  $E_1$ , et  $m$ .

$$v_A = \sqrt{\frac{2E_T - 4E_1}{m}} \quad \text{0,1 pt}$$

- h) La variation de vitesse  $\Delta v_B$  de la navette en  $B$  est-elle positive ou négative ? Justifiez votre réponse sans calcul.

$\Delta v_B > 0$  : les rayons de courbure en  $B$  montre que la vitesse est plus faible sur l'orbite de transfert. **0,1 pt**

**b)** Mouvement circulaire uniforme : l'accélération est l'accélération centripète :

$$m \frac{v_1^2}{R_1} = F_G = \frac{mMG}{R_1^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{MG}{R_1}}$$

**c)**

$$E_1 = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{mMG}{R_1} = \frac{1}{2} \frac{mMG}{R_1} - \frac{mMG}{R_1} = -\frac{1}{2} \frac{mMG}{R_1}$$

**e)** On utilise la conservation du moment cinétique  $\vec{L}$  :

$$\vec{L} \text{ cte} \Rightarrow R_1 v_A = R_2 v_B \Rightarrow v_B = \frac{R_1}{R_2} v_A$$

**f)** L'énergie mécanique sur l'orbite de transfert calculée en A est :  $E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1}$

L'énergie mécanique sur l'orbite de transfert calculée en B est :  $E_T = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{mMG}{R_2} = \frac{R_1^2}{2R_2^2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_2}$

Comme  $E_T$  est constante sur l'orbite, on en tire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1} &= \frac{R_1^2}{2R_2^2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_2} \Rightarrow \left( \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2} \right) \frac{1}{2}mv_A^2 = mMG \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 &= mMG \left( \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \left( \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right) = mMG \frac{R_2}{(R_2 + R_1)R_1} \end{aligned}$$

Et en reportant cette valeur de  $\frac{1}{2}mv_A^2$  dans l'expression de  $E_T$  en A :

$$E_T = mMG \frac{R_2}{(R_2 + R_1)R_1} - \frac{mMG}{R_1} = mMG \frac{R_2 - R_2 - R_1}{(R_2 + R_1)R_1} = -\frac{mMG}{(R_2 + R_1)}$$

*Note : On peut aussi procéder par élimination :*

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1} \\ E_T = \frac{R_1^2}{2R_2^2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{R_1}mMG \\ \frac{R_2^2}{R_1^2}E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{R_2}{R_1^2}mMG \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\left( \frac{R_2^2}{R_1^2} - 1 \right)}_{\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2}} E_T = \underbrace{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1^2} \right)}_{\frac{R_1 - R_2}{R_1^2}} mMG \\ &\Rightarrow E_T = \frac{R_1 - R_2}{R_2^2 - R_1^2} mMG = -\frac{mMG}{(R_2 + R_1)} \end{aligned}$$

**g)** On a vu en f)  $E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1}$  et en c)  $E_1 = -\frac{1}{2} \frac{mMG}{R_1}$  donc :

$$E_T = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{mMG}{R_1} = \frac{1}{2}mv_A^2 + 2E_1 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 = E_T - 2E_1 \Rightarrow v_A^2 = \frac{2E_T - 4E_1}{m}$$